
Contrôle continu 2

Questions de cours :

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1. Soit $B = \{v_1, \dots, v_m\} \subset E$. Rappeler les définitions pour que B soit libre, génératrice ou une base de E .
2. Donner la définition de dimension de E dans le cas où elle est finie.
3. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , donner la définition de " F et G sont supplémentaires".

Exercice 1. Considérons les matrices B, A_1, A_2, A_3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit $E = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$, et soit $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), BM = MB\}$.

1. La famille (A_1, A_2, A_3) est-elle libre ?
2. Donner une base et la dimension de E .
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que I_2 (matrice identité) et B sont dans F .
5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ecrire un système de 4 équations sur a, b, c, d , pour que M soit dans F .
6. Montrer que ce système se réduit à deux équations indépendantes sur a, b, c, d .
7. Donner une base de F et sa dimension (on pourra soit terminer la résolution du système sur a, b, c, d , soit utiliser la question 4).
8. Les sous-espaces vectoriels E et F sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2. On considère les trois vecteurs dans \mathbb{R}^3 suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Expliquer pourquoi il existe un et un seul endomorphisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$f(v_1) = 3v_2 + v_3 \quad f(v_2) = -v_2 \quad f(v_3) = v_3.$$

3. Donner la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. Trouver une base de $\text{Ker}(f)$.
5. Calculer le rang de f et donner une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ et soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel de polynômes d'ordre ≤ 2 . Considérons l'application

$$\Psi: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]; \quad \Psi(P)(X) = P(X - 1) - X^2 \cdot P(0).$$

1. Montrer que Ψ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de Ψ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
3. L'application linéaire Ψ est-elle un isomorphisme ?

Questions pouvant rapporter un bonus

4. Soit $\Phi: \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application linéaire $\Phi(P)(X) = P(X + 1)$.
Pour tout $n \geq 1$, calculer $(\Phi \circ \Psi)(P)(X)$ et donner une base de $\text{Ker}(\Phi \circ \Psi)$.
5. En déduire une base de $\text{Ker}(\Psi)$ pour tout $n \geq 1$.